Licence 3e année — parcours Mathématiques

2017-2018 — M67, Géométrie élémentaire

Solutions de l'interrogation

9 avril 2018

[durée : 1 heure]

Exercice 1 (Carré dans un triangle)

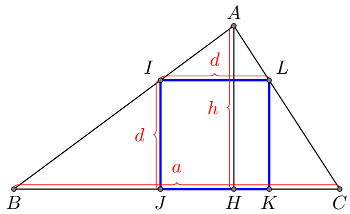
Soient $\triangle ABC$ un triangle, H le pied de la hauteur issue de A, et $IJKL$ un carré tel que $I \in [AB]$, $J, K \in [BC]$ et $L \in [CA]$. On note les longueurs $a = BC$, $h = AH$ et $d = IJ$.

a) Déterminer une relation entre les longueurs a , h et d.
Indication : Vous pouvez utiliser Thalès à deux reprises.

b) Exprimer le rapport des aires du carré $IJKL$ et du triangle $\triangle ABC$ en fonction de a et h.

c) Que vaut ce rapport dans le cas où le triangle $\triangle ABC$ est équilatéral ?

Solution :



a) D'après Thalès appliqué à $[IL]//[BC]$ on a $\frac{d}{a} = \frac{AI}{AB}$.
D'après Thalès appliqué à $[IJ]//[AH]$ on a $\frac{d}{h} = \frac{BI}{BA}$.
Et comme $\frac{AI}{AB} + \frac{BI}{BA} = \frac{AI+IB}{AB} = 1$ on trouve

$$\frac{d}{a} + \frac{d}{h} = 1 .$$

b) D'après la question précédente $dh + da = ah \implies d = \frac{ah}{a+h}$. Ainsi le rapport des aires est

$$\mathcal{A}_{IJKL} : \mathcal{A}_{\triangle ABC} = \left(\frac{ah}{a+h}\right)^2 : \frac{ah}{2} = \frac{2ah}{(a+h)^2} .$$

c) Dans le triangle équilatéral $\triangle ABC$ on a la relation $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ et donc

$$\mathcal{A}_{IJKL} : \mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{2\cancel{a^2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{a^2}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = 4(7\sqrt{3}-12)\,^{*}.$$

*. $4(7\sqrt{3} - 12) \approx \frac{1}{2}$

T.S.V.P.

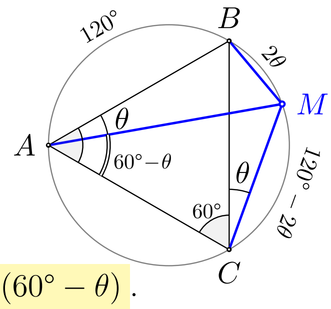
Exercice 2 (cas particulier du théorème de Ptolémée)

Soient $\triangle ABC$ un triangle équilatéral et M un point du cercle circonscrit situé sur le petit arc $\overset{\frown}{BC}$ (qui ne contient pas A). Montrer l'égalité

$$MA = MB + MC.$$

Solution :

Méthode 1 *(utilisant la trigonométrie)*



Soit 2θ la mesure du petit arc $\overset{\frown}{MB}$, donc $(120°-2\theta)$ et $(120°+2\theta)$ sont les mesures respectivement de $\overset{\frown}{CM}$ et $\overset{\frown}{AM}$. En utilisant le fait que la longueur d'une corde d'arc 2γ est $D\sin(\gamma)$, où D est le diamètre du cercle, on trouve $MA = D\sin(60° + \theta)$, $MB = D\sin(\theta)$ et $MC = D\sin(60° - \theta)$. Donc on a l'équivalence

$$MA = MB + MC \iff \sin(60° + \theta) = \sin(\theta) + \sin(60° - \theta).$$

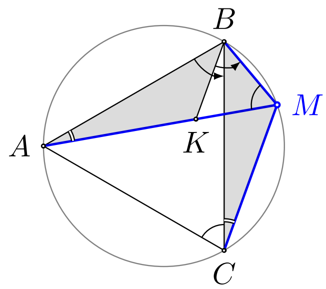
On peut démontrer cette deuxième égalité par des méthodes différentes, par exemple en utilisant la formule $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ on trouve

$$\sin(60° + \theta) = \sin(60°)\cos(\theta) + \cos(60°)\sin(\theta)$$
$$\sin(\theta) + \sin(60° - \theta) = \sin(\theta) + \sin(60°)\cos(\theta) - \cos(60°)\sin(\theta)$$

et comme $1 - \cos(60°) = \cos(60°)$ on obtient l'égalité cherchée.

Méthode 2 *(par construction géométrique)*

Nous allons utiliser ici la même construction géométrique que celle vue en td pour le théorème de Ptolémée.



Soit K un point sur $[AM]$ tel que $MK = MB$. Comme $\widehat{BMA} = \widehat{BCA} = 60°$, le triangle $\triangle BMK$ est équilatéral. Ainsi la rotation à $60°$ autour de B envoie A en C et K en M, donc $KA = MC$. On conclut avec $MA = MK + KA = MB + MC$.