Solutions de l'interrogation

5 mars 2018

[durée : 2 heures]

Exercice 1 (Construction à la règle et compas)

Soient $O(0,0)$ et $I(1,0)$ deux points donnés du plan euclidien. Illustrer par un dessin et donner un programme de construction à la règle et au compas à partir de O et I :

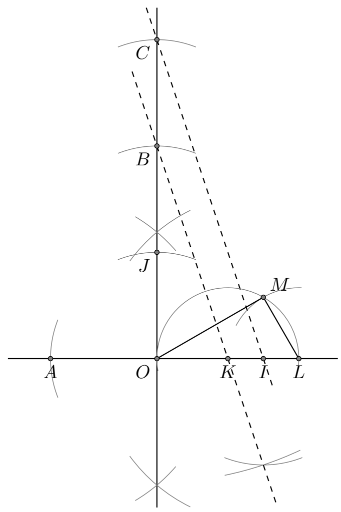
a) du point $J(0,1)$,

b) du point $K(\frac{2}{3},0)$,

c) de points $L \in [O,I)$ et M tels que $\triangle OLM$ soit rectangle en M, $OL = \frac{4}{3}$ et $LM = \frac{2}{3}$.

Solution :

On note $C(X,Y)$ le cercle de centre X passant par Y, $C(X,YZ)$ le cercle de centre X et de rayon YZ (qui est constructible si X, Y et Z le sont) et $C^*(X,Y) = C(X,Y) \setminus \{Y\}$.



a)
- — Soit $A = (OI) \cap C^*(O,I)$;
- — on construit la médiatrice de $[AI]$ passant par $C(A,I) \cap C(I,A)$;
- — alors $J \in$ médiatrice de $[AI] \cap C(O,I)$.

b)
- — Soit $B = (OJ) \cap C^*(J,O)$;
- — soit $C = (OJ) \cap C^*(B,J)$;
- — on considère la droite passant par B parallèle à (CI), qui passe par $C(I,CB) \cap C(B,CI)$, et qui coupe (OI) en K. En effet par Thalès $OK : OI = OB : OC = 2 : 3$.

c)
- — Soit $L = C^*(K,O) \cap (OI)$;
- — soit $M = C^*(K,O) \cap C^*(L,K)$. En effet comme M est sur le cercle de diamètre OL le triangle est rectangle en M et $LM = LK = \frac{2}{3}$ par construction.

Exercice 2 (Axiomatique)

On rappelle les propriétés d'incidence et d'ordre :

(I1) par deux points distincts passe une unique droite,

(I2) toute droite contient au moins deux points distincts,

(I3) il existe trois points non alignés,

(O1) si C est entre A et B, alors A, B et C sont alignés, deux à deux distincts et C est aussi entre B et A,

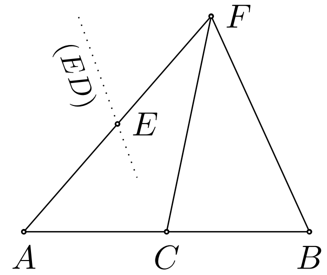
(O2) pour tous points distincts A et B il existe un point C tel que B soit entre A et C,

(O3) parmi trois points alignés deux à deux distincts, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres,

(O4) soient A, B, et C trois points non alignés et $\mathcal{D}$ une droite ne passant par aucun d'eux. Si $\mathcal{D}$ passe par un point D entre A et B, alors $\mathcal{D}$ passe ou bien par un point entre A et C, ou bien par un point entre B et C, mais pas les deux à la fois.

En utilisant seulement les propriétés **I1** à **O4** démontrer que si deux points distincts C et D sont entre A et B alors soit D est entre A et C, soit D est entre B et C.

Indication : Vous pouvez vous inspirer du dessin ci-contre.



Solution :

*On note $X \in]YZ[$ (resp. $X \notin]YZ[$) pour désigner que X **est** (resp. **n'est pas**) entre Y et Z.*

Soit E non aligné avec A et B **(I3)** et F tel que $E \in]AF[$ **(O2)**. Le point F n'est pas aligné avec A et B car sinon E serait sur la droite $(AF) \overset{\textbf{(I1)}}{=} (AB)$. Comme $D \neq C$ la droite (ED) ne passe pas par C, sinon on aurait eu $(ED) \overset{\textbf{(I1)}}{=} (CD) \overset{\textbf{(I1+O1)}}{=} (AB)$, ce qui est en contradiction avec $E \notin (AB)$. Par le même type de raisonnement on obtient que (ED) ne passe pas par A, B et F.

On applique **(O4)** à la droite ED et aux trois points non alignés A, C et F :

a) soit (ED) coupe $]AC[$ en D et la question est réglée ;

b) soit (ED) coupe $]FC[$.

- Dans le deuxième cas on applique d'abord **(O4)** à la droite ED et aux trois points non alignés F, A et B pour conclure que (ED) ne coupe pas $]FB[$ car elle coupe $]AF[$ en E et $]AB[$ en D.
- Puis, on applique encore une fois **(O4)** à la droite (ED) et aux trois autres points non alignés F, C et B, ce qui nous permet de conclure que $D = (ED) \cap (AB) \in]CB[$.

Exercice 3 (Exemple de droite d'Euler)

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal et on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,1)$, $(3,7)$ et $(-1,3)$.

a) (i) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois médianes du triangle $\triangle ABC$.

(ii) Vérifier que G isobarycentre de A, B et C est l'intersection de ces médianes.

b) (i) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois médiatrices du triangle $\triangle ABC$.

(ii) Vérifier que ces trois médiatrices sont concourantes en un point noté O.

c) (i) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois hauteurs du triangle $\triangle ABC$.

(ii) Vérifier que ces trois hauteurs sont concourantes en un point noté H.

d) Vérifier que les points G, O et H sont alignés.

Solution :

a) (i) La médiane issue de $A(1,1)$ passe par le milieu $(1,5)$ de $[BC]$. Ainsi son équation est $x=1$.

La médiane issue de $B(3,7)$ passe par le milieu $(0,2)$ de $[AC]$. Donc $(3,5)$ est un vecteur directeur et $(5,-3)$ est un vecteur normal. Ainsi son équation est $5x-3y = 5.0-3.2 = -6$.

La médiane issue de $C(-1,3)$ passe par le milieu $(2,4)$ de $[AB]$. Donc $(3,1)$ est un vecteur directeur et $(1,-3)$ est un vecteur normal. Ainsi son équation est $x-3y = -1-3.3 = -10$.

(ii) Le barycentre G a pour coordonnées $(\frac{1+3+(-1)}{3}, \frac{1+7+3}{3}) = (1, 11/3)$ qui vérifient $1=1$, $5.1-3.\frac{11}{3} = -6$ et $1-3.\frac{11}{3} = -10$.

b) (i) La médiatrice de $[AB]$ a pour vecteur normal $(2,6) = 2(1,3)$ et passe par son milieu $(2,4)$. Ainsi son équation est $x+3y = 2+3.4 = 14$.

La médiatrice de $[BC]$ a pour vecteur normal $(4,4) = 4(1,1)$ et passe par son milieu $(1,5)$. Ainsi son équation est $x+y = 1+5 = 6$.

La médiatrice de $[AC]$ a pour vecteur normal $(2,-2) = 2(1,-1)$ et passe par son milieu $(0,2)$. Ainsi son équation est $x-y = 0-2 = -2$.

Note : La médiatrice de deux points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) a pour vecteur normal (x_1-x_2, y_1-y_2) et passe par $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})$. Donc elle est définie par l'équation

$$(x_1-x_2)x + (y_1-y_2)y = \frac{x_1^2-x_2^2}{2} + \frac{y_1^2-y_2^2}{2}.$$

(ii) Soit $O(x,y)$ l'intersection des médiatrices de $[BC]$ et $[AC]$. Donc (x,y) vérifie les deux équation $x+y=6$ et $x-y=-2$. Ainsi on trouve les coordonnées $O(2,4)$. Et comme $2+3.4=4$ on constate que O est aussi sur la médiatrice de $[AB]$. *Au passage on remarque aussi que $O(2,4)$ coïncide avec le milieu de $[AB]$ et donc le triangle $\triangle ABC$ est rectangle en C.*

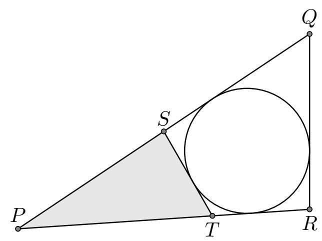
c) (i) La hauteur issue de $A(1,1)$ a pour vecteur normal $(4,4)=4(1,1)$. Ainsi son équation est $x+y=1+1=2$.
La hauteur issue de $B(3,7)$ a pour vecteur normal $(2,-2)=2(1,-1)$. Ainsi son équation est $x-y=3-7=-4$.
La hauteur issue de $C(-1,3)$ a pour vecteur normal $(2,6)=2(1,3)$. Ainsi son équation est $x+3y=-1+3.3=8$.

(ii) Soit $H(x,y)$ l'intersection des hauteurs issues de A et B. Donc (x,y) vérifie les deux équations $x+y=2$ et $x-y=-4$. Ainsi on trouve les coordonnées $H(-1,3)$. Et comme $-1+3.3=8$ on constate que O est aussi sur la hauteur issue de C. *On avait déjà remarqué que $\triangle ABC$ est rectangle en C et donc on savait que nécessairement $H=C$.*

d) On a $(1,11/3)=\frac{1}{3}(-1,3)+\frac{2}{3}(2,4)$, donc comme $G=\frac{1}{3}H+\frac{2}{3}O$ les trois points sont alignés. *Comme on avait remarqué que $H=C$ et O est le milieu de $[AB]$ on savait que G est sur la médiane HO. Par ailleurs la relation $G=\frac{1}{3}H+\frac{2}{3}O$ est vérifiée dans tous les triangles et la droite qui contient H,G et O est appelée* droite d'Euler.

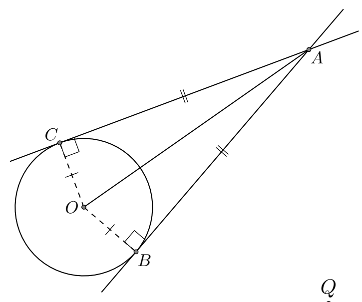
Exercice 4 (Kangourou 2008)

$\triangle PQR$ est un triangle dont les longueurs des côtés, PR, PQ et QR, sont respectivement 5, 6 et 3. T et S sont deux points, respectivement pris sur les segments $[PR]$ et $[PQ]$, tels que la droite (TS) soit tangente au cercle inscrit dans le triangle $\triangle PQR$. Déterminer le périmètre du triangle $\triangle PST$.



Solution :

On rappelle d'abord que étant donnés deux tangentes (AB) et (AC) issues de A vers un cercle $\mathcal{C}$ (de centre O) avec $B,C\in\mathcal{C}$ les points de tangence, alors $AB=AC$ (par Pythagore ou par triangles égaux, car les triangles rectangles $\triangle OBA$ et $\triangle OCA$ ont la même hypoténuse et deux cathètes $OC=OB$ égales au rayon).



Soient U,V,W et X les points de tangence respectivement de (SQ), (QR), (RT) et (TS). En utilisant les égalités $XS=SU$, $UQ=QV$, $VR=RW$ et $WT=TX$ on trouve pour le périmètre du triangle $\triangle PST$: $XS+SP+PT+TX=PU+PW=PQ-QU+PR-RW=PQ+PR-(QV+VR)=5+6-3=8$.