Licence 3e année
parcours Mathématiques

2017-2018
M67, Géométrie élémentaire

Solutions de l'examen

17 mai 2018

[durée : 3 heures]

Exercice 1

Soit $ABCD$ un trapèze convexe de bases $[AB]$ et $[CD]$ *(c.-à-d. tel que (AB) et (CD) sont parallèles)*. Soient O le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$, Δ la parallèle à (AB) passant par O, et I (resp. J) le point d'intersection de Δ et $[AD]$ (resp. de Δ et $[BC]$).

a) Montrer que $IO = \dfrac{AB \cdot CD}{AB + CD}$. *Indication : Utiliser deux fois Thalès.*

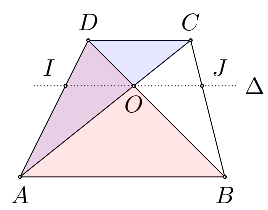
b) Exprimer IJ en fonction de AB et CD.

Solution :

a) Puisque (OI) et (DC) sont parallèles, le théorème de Thalès dans le triangle $\triangle ACD$ assure que $IO : DC = AI : AD$, et le même théorème dans $\triangle ABD$ assure que $IO : AB = ID : AD$. Puisque I est entre A et D on obtient en ajoutant ces deux égalités

$$\frac{IO}{CD} + \frac{IO}{AB} = \frac{AI + ID}{AD} = 1,$$

d'où le résultat attendu.



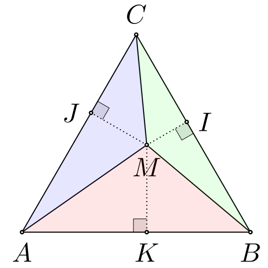
b) On a de même $OJ = \dfrac{AB \cdot CD}{AB + CD}$, puis $IJ = IO + OJ = 2\dfrac{AB \cdot CD}{AB + CD}$.

Exercice 2 (Théorème de Viviani)

Soit ABC un triangle équilatéral. Soit M un point intérieur au triangle ABC. Montrer que la somme des distances du point M aux trois côtés du triangle est égale à la hauteur de ce triangle.

Solution :

On note a et h respéctivement la longueur du côté et la hauteur du triangle équilatéral $\triangle ABC$. Soient I, J et K les projetés orthogonaux de M sur respectivement $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le triangle ABC est alors réunion des trois triangles $\triangle BMC$, $\triangle AMC$ et $\triangle AMB$, dont les aires valent respectivement $\frac{1}{2}BC\cdot MI$, $\frac{1}{2}CA\cdot MJ$ et $\frac{1}{2}AB \cdot MK$. Comme les intersections de ces triangles sont des segments, l'aire $\frac{1}{2}ah$ du trangle $\triangle ABC$ est la somme de leurs trois aires. Ainsi $\frac{1}{2}a(MI + MJ + MK) = \frac{1}{2}ah$, et on en déduit que la somme $MI + MJ + MK$ des distances de M aux trois côtés est égale à l hauteur h du triangle $\triangle ABC$.



Exercice 3 (CAPES 2011 - Construction de triangles)

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts B et C et un point M en dehors de la droite (BC).

Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point A qui la vérifie. On précisera dans chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.

a) M est le centre de gravité du triangle ABC.

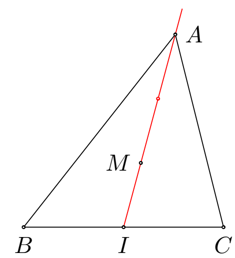
b) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

c) M est l'orthocentre du triangle ABC.

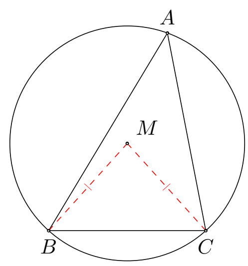
d) M est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Solution :

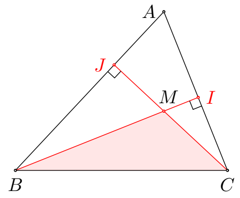
a) Rappelons que, si I est le milieu de $[BC]$, le centre de gravité M d'un triangle ABC est le point de $[IA]$ tel que $IM = \frac{1}{3}IA$. Il existe donc un unique point A tel que M soit le centre de gravité de ABC, et c'est l'unique point de la demi-droite $[IM)$ tel que $IA = 3IM$.



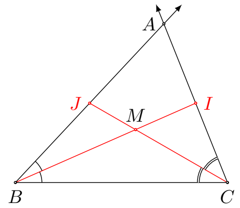
b) Le centre du cercle circonscrit à un triangle est l'unique point à égale distance des sommets A, B et C. Ainsi, si $MB \neq MC$ il n'existe aucun point A tel que M soit le centre du cercle circonscrit à $\triangle ABC$. En revanche, si $MB = MC$, alors, pour tout point A du cercle de centre M passant par B, distinct de B et C, le centre du cercle circonscrit à ABC est M.



c) Remarquons que si BI et CJ sont des hauteurs dans $\triangle ABC$ (voir image), alors CI et BJ sont des hauteurs dans $\triangle MBC$. Ainsi M est l'orthocentre de $\triangle ABC$ si et seulement si A est l'orthocentre de $\triangle BCM$. Il existe ainsi une unique point A tel que M soit l'orthocentre de $\triangle ABC$, et c'est l'orthocentre de $\triangle BCM$.



d) Si M est le centre du cercle inscrit dans ABC, alors $\widehat{ABC} = 2\widehat{MBC}$ et $\widehat{ACB} = 2\widehat{MCB}$, de sorte que A est le point d'intersection de deux demi-droites uniquement déterminées par B, C et M. Ces deux demi-droites se coupent si et seulement si $\widehat{MBC} + \widehat{MCB} < \pi/2$ *(c.-à-d. si et seulement si $\triangle CMB$ est obtus en M).*



Exercice 4

Soit ABC un triangle. Soit P un point du segment $[BC]$. On note M (resp. N) son projeté orthogonal sur (AB) (resp. sur (AC)). On cherche P tel que la distance MN soit minimale.

a) Étudier le cas d'un triangle ABC rectangle en A.

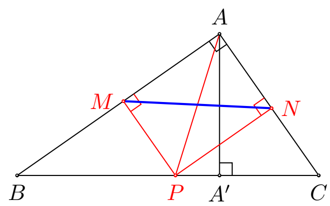
b) On suppose maintenant ABC quelconque.

(i) Montrer que $\dfrac{MN}{AP} = \sin \widehat{BAC}$.

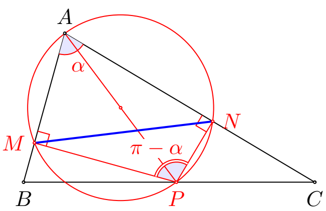
(ii) Conclure.

Solution :

a) Si l'angle en A est droit, alors $AMPN$ est un parallélogramme avec un angle droit, donc un rectangle, et ses diagonales AP et MN sont égales. Minimiser MN revient donc à minimiser AP. Or, lorsque P parcourt la droite (BC), AP est minimale lorsque P est le projeté orthogonal A' de A sur (BC). Comme le triangle $\triangle ABC$ n'est pas obtus, tout les pieds des hauteurs sont sur les côtés du triangle, donc en particulier $A' \in [BC]$ est la position recherchée de P.

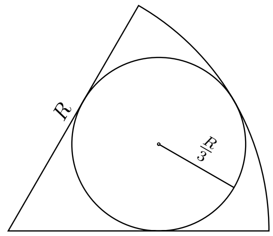


b) (i) Soit α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Puisque les triangles AMP et ANP sont rectangles en M et N, les points M et N appartiennent au cercle de diamètre $[AP]$ et les angles $\widehat{MPN}$ et $\widehat{MAN}$, qui éclairent la corde MN, on le même sinus, $\sin\alpha$. La longueur de la corde $[MN]$ vaut alors $AP \sin\alpha$. Cette formule reste vrai même dans les cas limites où deux des points M,N,A et P coïncident.



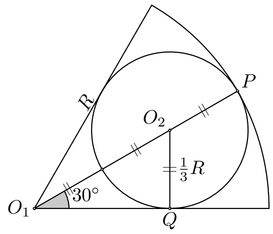
(ii) Alors à nouveau MN est minimale quand AP l'est. Si $A' \in [BC]$ alors $P = A'$ est la position recherché, comme dans la question précédente, si $B \in [A'C]$ alors $P = B$ et dans le dernier cas, $C \in [BA']$, c'est $P = C$ est la position recherché.

Exercice 5 (Kangourou 2006)



On considère la figure ci-contre ; le quotient du rayon du secteur circulaire par le rayon du cercle inscrit dans ce secteur est 3. Quel est le quotient des aires de ce secteur circulaire et du cercle inscrit ?

Solution :



On note les points comme sur la figure ci-contre. Comme $O_1O_2 = R - \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}R$, on trouve que $\widehat{O_2O_1Q} = \arctan \frac{O_2Q}{O_1O_2} = \arctan \frac{1}{2} = 30°$. Ainsi l'aire du secteur est $\frac{1}{6}\pi R^2$ et l'aire du disque est $\frac{1}{9}\pi R^2$. Donc le rapport recherché est $\frac{3}{2}$.