Examen final

17 mai 2018

[durée : 3 heures]

Documents autorisés : *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1

Soit $ABCD$ un trapèze convexe de bases $[AB]$ et $[CD]$ *(c.-à-d. tel que* (AB) *et* (CD) *sont parallèles).* Soient O le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$, Δ la parallèle à (AB) passant par O, et I (resp. J) le point d'intersection de Δ et $[AD]$ (resp. de Δ et $[BC]$).

a) Montrer que $IO = \dfrac{AB \cdot CD}{AB + CD}$. *Indication: Utiliser deux fois Thalès.*

b) Exprimer IJ en fonction de AB et CD.

Exercice 2 (Théorème de Viviani)

Soit ABC un triangle équilatéral. Soit M un point intérieur au triangle ABC. Montrer que la somme des distances du point M aux trois côtés du triangle est égale à la hauteur de ce triangle.

Exercice 3 (CAPES 2011 - Construction de triangles)

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts B et C et un point M en dehors de la droite (BC).

Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point A qui la vérifie. On précisera dans chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.

a) M est le centre de gravité du triangle ABC.

b) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

c) M est l'orthocentre du triangle ABC.

d) M est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice 4

Soit ABC un triangle. Soit P un point du segment $[BC]$. On note M (resp. N) son projeté orthogonal sur (AB) (resp. sur (AC)). On cherche P tel que la distance MN soit minimale.

a) Étudier le cas d'un triangle ABC rectangle en A.

b) On suppose maintenant ABC quelconque.

(i) Montrer que $\dfrac{MN}{AP} = \sin \widehat{BAC}$.

(ii) Conclure.

Exercice 5 (Kangourou 2006)

On considère la figure ci-contre ; le quotient du rayon du secteur circulaire par le rayon du cercle inscrit dans ce secteur est 3. Quel est le quotient des aires de ce secteur circulaire et du cercle inscrit ?