SOLUTIONS DU RATTRAPAGE

29 juin 2018

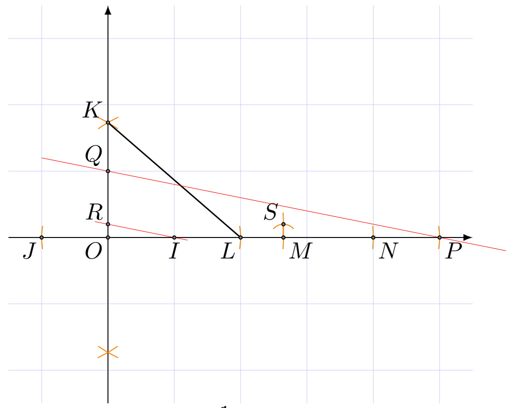
[durée : 3 heures]

Exercice 1 (Construction à la règle et au compas)

On se place dans le plan cartésien $\mathbf{R}^2$. Construire à la règle et au compas, à partir des points $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$, le point de coordonnées $(\sqrt{7}, \dfrac{1}{5})$. On donnera un programme de construction clair et justifié, accompagné d'un dessin.

Solution :

On note $C(X,Y)$ le cercle de centre X passant par Y, $C(X,YZ)$ le cercle de centre X et de rayon YZ (qui est constructible si X, Y et Z le sont) et $C^*(X,Y) = C(X,Y) \setminus \{Y\}$.



— Soit $J(-1,0) = (OI) \cap C^*(O,I)$.
— Soient $K(0,\sqrt{3})$ et $K'(0,-\sqrt{3})$ les points de $C(I,J) \cap C(J,I)$.
— Soit $L(2,0) = (OI) \cap C(I,O)$.
— Soit $M(\sqrt{7},0) = [OI) \cap C(O,KL)$.
— Soit $N(4,0) = (OI) \cap C^*(L,O)$.
— Soit $P(5,0) = (OI) \cap C^*(N,OI)$.
— Soit $Q(0,1) = (KK') \cap C^*(N,OI)$.
— Soit Δ la droite qui passe par I et est parallèle à (PQ). Soit $R(0,\frac{1}{5}) = \Delta \cap (KK')$.
— Soit $S(\sqrt{7},\frac{1}{5}) = C(M,OR) \cap C(R,OM)$.

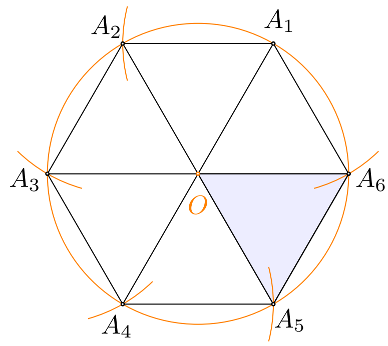
Exercice 2 (Hexagone régulier)

Soient Γ un cercle de centre O et A_1 un point de Γ. Soient A_2 et A_6 les points d'intersection de Γ et du cercle de centre A_1 passant par O. Le cercle de centre A_2 passant par A_1 recoupe Γ en A_3, celui de centre A_3 passant par A_2 recoupe Γ en A_4, celui de centre A_4 passant par A_3 recoupe Γ en A_5.

Démontrer que $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ est un hexagone régulier, c'est-à-dire un hexagone dont tous les côtés sont de même longueur et dont tous les angles (intérieurs) sont égaux.
(On ne demande pas de justifier la construction des points $A_1, \ldots, A_6$.)

Solution :

Par construction, les triangles A_1OA_2, A_6OA_1, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_5 sont équilatéraux. Leurs angles en O sont donc égaux à $\pi/3$. Ainsi, l'angle au sommet du triangle isocèle A_5OA_6 vaut $2\pi - 5\pi/3 = \pi/3$. Le triangle est équilatéral, et les 6 côtés de l'hexagone ont même longueur, égale au rayon du cercle. De plus, les angles $\widehat{A_2A_1A_6}, \widehat{A_3A_2A_1}, \ldots, \widehat{A_1A_6A_5}$ sont tous égaux à $2\pi/3$.



Exercice 3 (Aire)

Soient $ABCD$ un rectangle, I le milieu de $[AD]$, J celui de $[CD]$ et M le point d'intersection de (CI) et (AJ).

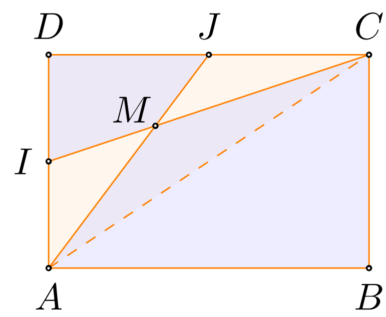
a) Montrer que M est à l'intérieur du rectangle $ABCD$.
Indication : on pourra préciser la nature de M pour le triangle ACD.

b) Montrer que $\text{aire}(ABCM) = 4\,\text{aire}(IDJM)$.

Solution :

a) Puisque les droites (IC) et (AJ) sont des médianes de ACD, M est le centre de gravité de ce triangle. Il est donc à l'intérieur de ACD et a fortiori à l'intérieur du rectangle $ABCD$.

b) Les triangles DJM et ABM sont homothétiques (image l'un de l'autre par une homothétie de centre M ; on peut aussi constater que leurs angles sont égaux). Le rapport d'homothétie est égal à $\frac{DM}{BM}$. Or, si O est le milieu de $[AC]$ (qui est celui de $[BD]$, puisque $ABCD$ est un parallélogramme), on a $2MO = DM = \frac{2}{3}DO$, d'où, puisque $DO = OB$, $\frac{DM}{BM} = \frac{1}{2}$.



Ainsi aire $ABM = 2^2$ aire DJM. On montre de même que BCM et DIM sont semblables, de rapport $2 : 1$, d'où aire $BCM = 2^2$ aire DIM. La conclusion en résulte.

Exercice 4 (Formule de Héron)

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

a) Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC}$.

b) Exprimer $4b^2c^2\sin^2\widehat{BAC}$ en fonction de a, b et c.

c) En déduire la formule de Héron : l'aire du triangle ABC est égale à $\text{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle.

d) Exprimer le rayon du cercle inscrit dans ABC en fonction des longueurs a, b et c.

Solution :

a) Vu en cours.

b) On a $4b^2c^2\sin^2\widehat{A} = 2bc(1-\cos\widehat{A})\cdot 2bc(1+\cos\widehat{A}) = (2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2) = (a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)$.

c) On sait que l'aire est égale à $\frac{1}{2}bc\sin^2\widehat{A}$. Son carré est donc égal à $\frac{1}{16}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a) = \frac{1}{16}(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)2p = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

d) Soit I le centre du cercle inscrit. Le triangle ABC est réunion presque disjointe des triangles ABI, ACI et BCI. Les hauteurs de ces triangles issues de I sont des rayons du cercle inscrit. Le rayon r de ce cercle vérifie donc aire $ABC = \frac{1}{2}r\cdot(a+b+c) = rp$. On obtient ainsi $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Exercice 5 (Triangle équilatéral)

Les deux questions sont indépendantes.

a) Soit ABC un triangle équilatéral. Soit G son centre de gravité. Montrer que les cercles circonscrits à ABC, ABG, ACG et BCG ont le même rayon.

b) Soit ABC un triangle quelconque.

(i) Montrer le *théorème de la médiane* : si I est le milieu de $[BC]$, alors

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2.$$

Indication : Vous pouvez introduire le pied H de la hauteur issue de A, ou utiliser la question (a) de l'exercice 4.

(ii) En déduire qu'un triangle est équilatéral si et seulement si son centre de gravité et le centre de son cercle circonscrit coïncident.

Solution :

a) Le rayon du cercle circonscrit à ABC est $\frac{AB}{2\sin\widehat{BCA}}$, celui de ABG, $\frac{AB}{2\sin\widehat{AGB}}$. Or, ABC étant équilatéral, $\widehat{BCA} = \pi/3$ et $\widehat{BGA} = 2\pi/3$. Leurs sinus sont donc égaux, et les cercles circonscrits à ABC et à ABG ont même rayon. Par symétrie, c'est aussi le rayon des cercles circonscrits à ACG et BCG (et ce rayon est égal à $\frac{AB}{2\sin(\pi/3)} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$.

b) (i) La loi des cosinus (exercice 4 (a)) dans ABI s'écrit $AB^2 = BI^2 + AI^2 - 2AI\cdot BI\cos\widehat{AIB}$. Dans ACI, on a de même $AC^2 = CI^2 + AI^2 - 2AI\cdot CI\cos\widehat{ACI}$. Les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$ sont supplémentaires, donc leur cosinus sont opposés. En sommant les deux égalités précédentes et en utilisant $BC = 2IC = 2IB$, on obtient ainsi $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$.

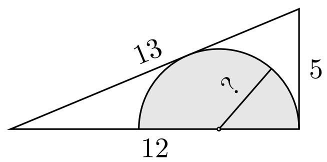
(ii) Dans un triangle équilatéral, les médianes et les médiatrices sont confondues, donc leurs points d'intersection sont les mêmes. Réciproquement, soit ABC un triangle dont le centre de gravité G est le centre du cercle circonscrit. On a alors $AG = BG = CG$. Soient I, J, K les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Les médianes ont pour longueurs $AI = \frac{3}{2}AG$, $BJ = \frac{3}{2}BG$ et $CK = \frac{3}{2}CG$. Elles sont donc égales. Le théorème de la médiane assure

$$\left\{\begin{array}{lcl} AB^2 + AC^2 & = & \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2 \\ AB^2 + BC^2 & = & \frac{1}{2}AC^2 + 2BJ^2 \\ AC^2 + BC^2 & = & \frac{1}{2}AB^2 + 2CK^2 \end{array}\right.$$

d'où on déduit $AB^2 = \frac{4}{3}AI^2 = AC^2 = BC^2$. Le triangle ABC est donc équilatéral.

Exercice 6 (Kangourou 2012)

Soient un triangle rectangle de côtés 5, 12 et 13 et le cercle centré sur le côté de longueur 12 et tangent aux deux autres côtés. Déterminer le rayon du cercle.



Solution :

On note O le centre du cercle sur le côté AB du triangle $\triangle ABC$ et P son point de tangence avec AC. Soit le rayon $r = OP = OB$. Nous avons les triangles rectangles semblables $\triangle APO$ et $\triangle ABC$, et donc $OP : AO = CB : AC$. Ainsi $\frac{r}{12-r} = \frac{5}{13} \iff r = \frac{10}{3}$.