Rattrapage

29 juin 2018

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Construction à la règle et au compas)

On se place dans le plan cartésien $\mathbf{R}^2$. Construire à la règle et au compas, à partir des points $O = (0, 0)$ et $I = (1, 0)$, le point de coordonnées $(\sqrt{7}, \frac{1}{5})$. On donnera un programme de construction clair et justifié, accompagné d'un dessin.

Exercice 2 (Hexagone régulier)

Soient Γ un cercle de centre O et A_1 un point de Γ. Soient A_2 et A_6 les points d'intersection de Γ et du cercle de centre A_1 passant par O. Le cercle de centre A_2 passant par A_1 recoupe Γ en A_3, celui de centre A_3 passant par A_2 recoupe Γ en A_4, celui de centre A_4 passant par A_3 recoupe Γ en A_5.

Démontrer que $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ est un hexagone régulier, c'est-à-dire un hexagone dont tous les côtés sont de même longueur et dont tous les angles (intérieurs) sont égaux.

(On ne demande pas de justifier la construction des points $A_1, \ldots, A_6$.)

Exercice 3 (Aire)

Soient $ABCD$ un rectangle, I le milieu de $[AD]$, J celui de $[CD]$ et M le point d'intersection de (CI) et (AJ).

a) Montrer que M est à l'intérieur du rectangle $ABCD$.
Indication : on pourra préciser la nature de M pour le triangle ACD.

b) Montrer que $\text{aire}(ABCM) = 4\,\text{aire}(IDJM)$.

T.S.V.P.

Exercice 4 (Formule de Héron)

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

a) Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC}$.

b) Exprimer $4b^2c^2\sin^2\widehat{BAC}$ en fonction de a, b et c.

c) En déduire la formule de Héron : l'aire du triangle ABC est égale à aire$(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle.

d) Exprimer le rayon du cercle inscrit dans ABC en fonction des longueurs a, b et c.

Exercice 5 (Triangle équilatéral)

Les deux questions sont indépendantes.

a) Soit ABC un triangle équilatéral. Soit G son centre de gravité. Montrer que les cercles circonscrits à ABC, ABG, ACG et BCG ont le même rayon.

b) Soit ABC un triangle quelconque.

(i) Montrer le *théorème de la médiane* : si I est le milieu de $[BC]$, alors

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2.$$

Indication : Vous pouvez introduire le pied H de la hauteur issue de A, ou utiliser la question (a) de l'exercice 4.

(ii) En déduire qu'un triangle est équilatéral si et seulement si son centre de gravité et le centre de son cercle circonscrit coïncident.

Exercice 6 (Kangourou 2012)

Soient un triangle rectangle de côtés 5, 12 et 13 et le cercle centré sur le côté de longueur 12 et tangent aux deux autres côtés. Déterminer le rayon du cercle.