

TD3 : GÉOMÉTRIE PLANE

On se place dans le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$.

Propriétés basiques – Cours

Exercice 1

Montrer que deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

Exercice 2 (Médiatrice)

Soient A et B deux points distincts. Montrer que l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Exercice 3 (Bissectrice et longueurs)

Soit M le pied de la bissectrice issue de A dans un triangle $\triangle ABC$ (c.-à-d. le point d'intersection de cette bissectrice et du côté opposé $[BC]$).

- a) Montrer l'égalité des rapports $AB : AC = MB : MC$.
- b) Montrer que la bissectrice AM coupe le cercle circonscrit en un point P qui est sur la médiatrice.
- c) Montrer que $AM^2 = AB \times AC - MB \times MC$

Exercice 4 (Parallélogrammes)

- a) Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est convexe si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ se rencontrent.
- b) Montrer que pour un quadrilatère convexe $ABCD$ les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) c'est un parallélogramme ;
 - (ii) les angles opposés sont égaux ;
 - (iii) les côtés opposés sont égaux ;
 - (iv) deux côtés opposés sont parallèles et égaux ;
 - (v) ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
- c) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle (resp. un losange) si et seulement si ses diagonales sont égales (resp. perpendiculaires).
- d) Montrer que les bissectrices d'un parallélogramme forment un rectangle. À quelle condition forment-elles un carré ?

- e) Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 5 (Quadrilatère inscrit)

Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé.

- a) Montrer que si $ABCD$ est inscrit dans un cercle, alors $ABCD$ est convexe et ses diagonales se coupent en un point.
- b) Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
- $ABCD$ est inscrit dans un cercle.
 - $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi$ (ou $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi$).
 - $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en S et $AS \times SC = BS \times SD$.
 - $AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$ (c'est le *théorème de Ptolémée*).

Exercice 6 (Cas de similitude)

Soient $\triangle ABC$ et $A'B'C'$ deux triangles tels que $(A'B') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$ et $(B'C') \parallel (BC)$.

- a) Montrer que les triangles $\triangle ABC$ et $A'B'C'$ sont semblables.
- b) Montrer que de plus les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Exercice 7 (Points remarquables dans le triangle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle.

- a) Montrer que les trois bissectrices sont concourantes. Montrer que leur point commun est centre d'un *cercle inscrit* dans le triangle $\triangle ABC$, et qu'il n'y a qu'un seul tel centre (et un seul tel cercle).
- b) Montrer que la bissectrice d'un angle et les bissectrices extérieures des deux autres angles sont également concourantes.
- c) Montrer que les trois médiatrices du triangle sont concourantes. Montrer que leur point commun est *centre du cercle circonscrit* au triangle $\triangle ABC$.
- d) Montrer que les trois hauteurs sont concourantes. On appelle *orthocentre* leur point d'intersection.
- e) Montrer que les trois médianes sont concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base correspondante. On appelle *centre de gravité* ou *barycentre* leur point d'intersection.
- f) Montrer que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés (on appelle *droite d'Euler* la droite passant par ces trois points).

Exercice 8 (Rayons des cercles circonscrit et inscrit)

Soit $\triangle ABC$ un triangle.

- a) Exprimer le rayon du cercle circonscrit en fonction des longueurs des côtés et des angles du triangle.
- b) Exprimer le rayon du cercle inscrit en fonction du périmètre et de l'aire du triangle.

Dans le triangle

Exercice 9

Soient $\triangle ABC$ un triangle et H son orthocentre. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC) . Montrer que H' est sur le cercle circonscrit à $\triangle ABC$.

Exercice 10

Soient $\triangle ABC$ un triangle et P, Q, R trois points situés respectivement sur $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP et CPQ ont un point commun.

Exercice 11 (Carré dans un triangle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle *acutangle*¹.

- a) Montrer qu'il existe un carré $IJKL$ avec $I \in [AB], J \in [AC]$ et $K, L \in [BC]$. En donner une construction.
- b) Un tel carré est-il unique ?
- c) Que se passe-t-il si le triangle a un angle obtus ?

Exercice 12 (Inégalité triangulaire)

Soit $\triangle ABC$ un triangle.

- a) Montrer que si $AB > AC$, alors $\widehat{C} > \widehat{B}$ (on pourra considérer $B' \in [AB]$ tel que $AB' = AC$).
- b) Montrer qu'on a en fait équivalence : $AB > AC$ si et seulement si $\widehat{C} > \widehat{B}$.
- c) En déduire l'inégalité triangulaire : dans un triangle, chacun des côtés est plus petit que la somme des deux autres.
- d) Déduire de la question a) qu'un disque est convexe.

Exercice 13 (Triangle orthique)

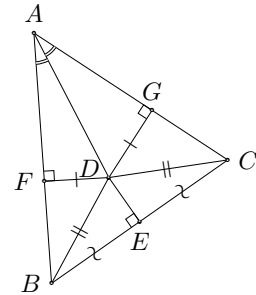
Soit $\triangle ABC$ un triangle. On note respectivement H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C . Montrer que les bissectrices du triangle $\triangle H_A H_B H_C$ sont les hauteurs du triangle $\triangle ABC$.

1. À angles aigus.

Exercice 14 (Tout triangle est isocèle)

On donne ici un argument pour établir que tout triangle est isocèle (dû à W.W. Rouse Ball). Soit $\triangle ABC$ un triangle quelconque. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} avec la médiatrice du côté opposé $[BC]$. Soient E, F et G les projetés orthogonaux de D sur $[BC], [AB]$ et $[AC]$.

- Montrer que $DF = DG$ et $AF = AG$.
- Montrer que $DB = DC$, puis que $FB = GC$.
- En déduire que $\triangle ABC$ est isocèle, puis qu'il est équilatéral.
- Comment expliquer cela?



Cercles, angles et longueurs

Exercice 15

Soient A et B deux points et $\alpha \in]0, \pi[$ donnés. Soit Γ l'ensemble des points C tels que $\widehat{ACB} = \alpha$.

- Décrire l'ensemble Γ . Sous quelle condition Γ est un cercle?
- Montrer que quand C parcourt Γ , l'isobarycentre G de $\triangle ABC$ parcourt deux arcs de cercles. Sous quelle condition G parcourt un cercle?
- Montrer que quand C parcourt Γ , le centre du cercle inscrit I de $\triangle ABC$ parcourt deux arcs de cercles. Sous quelle condition I parcourt un cercle?
- Montrer que quand C parcourt Γ , l'orthocentre H de $\triangle ABC$ parcourt deux arcs de cercles. Sous quelle condition H parcourt un cercle?
- Quand C parcourt Γ , quelle est l'ensemble parcouru par le centre du cercle circonscrit de $\triangle ABC$?

Exercice 16 (Puissance d'un point)

Soient M un point et \mathcal{C} un cercle. On considère une droite \mathcal{D} passant par P et qui rencontre \mathcal{C} en deux points (pas forcément distincts) S et T .

- Montrer que la quantité $\overline{MS} \times \overline{MT}$ ne dépend pas du choix de la droite \mathcal{D} .

Pour la suite on note cette quantité $P_{\mathcal{C}}(M)$ et on l'appelle puissance de M par rapport à \mathcal{C} .

- Étant donné un cercle \mathcal{C} , déterminer le signe de $P_{\mathcal{C}}(M)$ en fonction de la position de M .
- Montrer que l'ensemble des points à égale puissance par rapport à deux cercles non concentriques donnés est une droite (appelée *axe radical* de ces deux cercles).
- Déterminer l'axe radical dans le cas de deux cercles distincts qui s'intersectent.
- Quelle droite «connue» généralise l'axe radical.
- Étant donnés deux cercles non concentriques, construire à la règle et compas l'axe radical.

Exercice 17 (Angle entre deux cercles)

Soient deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de centre respectifs O_1 et O_2 qui se rencontrent en un point S . On définit (la mesure de) l'angle entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 comme étant égale à $\widehat{O_1MO_2}$.

- Quelle est l'angle entre deux cercles tangents extérieurement ?
- Quelle est l'angle entre deux cercles tangents intérieurement ?
- Soient un cercle \mathcal{C} et un point M extérieur à \mathcal{C} . Montrer qu'il existe un cercle de centre M qui est orthogonal² à \mathcal{C} .
- Étant donnés deux cercles, déterminer l'ensemble des centres des cercles orthogonaux à ces deux cercles.
- Étant donnés trois cercles en position générale, montrer qu'il existe un unique cercle qui est orthogonal aux trois.

Utilisation des aires

On note $\text{aire}(P)$ l'aire d'une figure P .

Exercice 18

Soit T un triangle inclus dans un rectangle R . Montrer que $\text{aire}(T) \leq \frac{1}{2} \text{aire } R$.

Exercice 19 Soit $\triangle ABC$ un triangle inscrit dans le cercle fixé \mathcal{C} .

- Sous quelle condition l'aire de $\triangle ABC$ est maximale ?
- Sous quelle condition $AB^2 + BC^2 + CA^2$ est maximal ?
- Et pour un quadrilatère $ABCD$?

Exercice 20 (Théorèmes de Gergonne et de Céva)

Soient $\triangle ABC$ un triangle et A', B', C' trois points de (BC) , (AC) et (AB) .

- Si (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un point M intérieur au triangle $\triangle ABC$, alors on a la relation de Gergonne

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1.$$

Indication : Interpréter les rapports comme des rapports d'aires.

- Les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si la relation de Céva

$$\frac{\overline{A'B} \overline{B'C} \overline{C'A}}{\overline{A'C} \overline{B'A} \overline{C'B}} = -1.$$

2. Qui fait un angle de $\pi/2$ avec \mathcal{C} .

Exercice 21 (Formule de Héron)

- a) Montrer que l'aire d'un triangle $\triangle ABC$ de côtés de longueurs a , b et c et de demi-périmètre $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ est

$$\text{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Indication : Exprimer $\sin^2(\widehat{A})$.

- b) En déduire une expression du rayon du cercle inscrit en fonction des longueurs des côtés.

Exercice 22 (Longueurs des hauteurs)

Donnes une condition nécessaire et suffisante sur trois nombres réels h_A , h_B et h_C pour qu'ils soient les longueurs des hauteurs d'un triangle.

Et pour qu'ils soient les longueurs des hauteurs d'un triangle acutangle ?

Exercice 23 (Partage de trapèze)

Soit $ABCD$ un trapèze de grande base CD et de petite base AB . Construire un point M de $[CD]$ tel que (AP) partage le trapèze en deux parties de même aire.

Exercice 24 (Rosace)

Calculer l'aire de la rosace à 6 feuilles construite au compas.

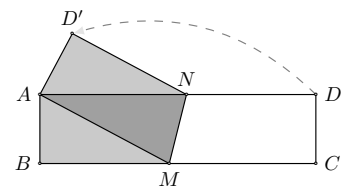
Exercice 25

Deux disques Δ_1 et Δ_2 de même rayon sont tangents extérieurement et tangents à une même droite \mathcal{D} . Calculer l'aire du disque Δ tangent à la fois à Δ_1 , Δ_2 et \mathcal{D} .

Exercice 26 (Kangourou 2012)

Un morceau de papier rectangulaire $ABCD$, de taille 4 sur 16, est plié le long de la droite (MN) de sorte que le sommet C coïncide avec le sommet A (voir la figure).

Quelle est l'aire du pentagone $ABMND'$?



Exercice 27 (Kangourou 2015)

Soit $IJKL$ un rectangle. Soient M_1 le milieu de KL , M_2 le milieu de IM_1 , M_3 le milieu de JM_2 et M_4 le milieu de KM_3 (voir la figure ci-contre). Quel est le rapport entre l'aire du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ et celle du rectangle $IJKL$?

