Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies, Département de Mathématiques

Licence 3e année, parcours Mathématiques — 2017-2018
M67, Géométrie élémentaire

TD4 : Géométrie de l'espace

On se place dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3

Tétraèdres

Exercice 1 (Construction)

a) Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Que dire du projeté de A sur le plan (BCD) ?

b) Construire un tétraèdre régulier.

Exercice 2 (Groupe des isométries d'un tétraèdre régulier)

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier.

a) Vérifier que toute isométrie préservant le tétraèdre $ABCD$ préserve l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ de ses sommets.

b) Construire un morphisme de groupes injectif du groupe des isométries préservant le tétraèdre dans le groupe symétrique S_4.

c) Vérifier que ce morphisme est bijectif.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soient M, N, P trois points (distincts des sommets) situés respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[CD]$. Démontrer que le plan (MNP) coupe l'arête $[BD]$ et construire le point d'intersection.

Cubes, parallélépipèdes, sections

Exercice 4

On considère les triangles dont les sommets sont trois sommets d'un cube $ABCDA'B'C'D'$ donné.

a) Montrer qu'à isométrie près il y a trois sortes de tels triangles. Préciser leur nature, et leurs dimensions.

b) Combien y a-t-il de triangle de chaque sorte ?

Exercice 5 (Section d'un cube)

Soient $ABCDA'B'C'D'$ un cube et trois points M, N, P, situés respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[CD]$ et $[A'B']$. Construire la section du cube par le plan (MNP). Combien de côtés peut avoir le polygone ainsi obtenu ?

Exercice 6 (Fourmi au plafond)

Expliquer comment trouver le plus court chemin que doit emprunter une fourmi située un plafond d'une pièce parallélépipédique pour atteindre, en suivant les murs, plafond et plancher, une miette située sur le plancher.

Exercice 7 (Groupe des isométries préservant un cube)

Soit $\mathcal{C}$ un cube donné.

a) Montrer qu'une isométrie préservant le cube $\mathcal{C}$ préserve son centre O.

b) Déterminer le groupe des rotations préservant le cube.

c) Que peut-on en déduire sur le groupe des isométries préservant le cube ?

Polyèdres

Exercice 8 (Polyèdres réguliers)

Soit $n \geqslant 3$ et soient $[Ox_1), [Ox_2), \dots, [Ox_n)$, n demi-droites deux à deux distinctes de même origine O telles que, pour tout $i = 1, \dots, n$ les demi-droites épointées $[Ox_k) \setminus \{O\}$ pour $k \neq i, i+1$ sont toutes dans le même demi-espace ouvert E_i délimité par le plan $(Ox_i x_{i+1})$ (en convenant que $Ox_{n+1} = Ox_1$). On appelle *angle polyèdre convexe* l'intersection $\bigcap_{i=1}^n E_i$, notée $Ox_1 \dots x_n$.

a) Montrer que si $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ sont trois demi-droites de même origine non coplanaires, alors

(i) $\widehat{xOy} < \widehat{xOz} + \widehat{zOy}$,

(ii) $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOx} < 2\pi$.

b) Montrer que si $Ox_1 \dots x_n$ est un angle polyèdre convexe, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i O x_{i+1}} < 2\pi$$

(avec la convention $\widehat{x_n O x_{n+1}} = \widehat{x_n O x_1}$).

c) Un polyèdre convexe est *régulier* si toutes ses faces sont des polygones réguliers à p côtés et si en chacun de ses sommets aboutissent q arêtes. Montrer que les couples (p, q) possibles sont

$$(3,3),\ (3,4),\ (4,3),\ (3,5),\ (5,3)$$

(on pourra admettre que q est supérieur ou égal à 3).

Volume

Exercice 9 (Volume du tétraèdre régulier)

a) Calculer le volume d'un tétraèdre régulier en fonction de la longueur a de ses arêtes.

b) Retrouver ce résultat en plongeant le tétraèdre régulier dans un cube de sorte que son complémentaire dans le cube soit la réunion de quatre tétraèdres isométriques.

Exercice 10

Calculer le volume d'une boule percée d'un trou cylindrique d'axe un diamètre de la boule et de hauteur $2a$.