Université de Lille — FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES, Département de Mathématiques

LICENCE 3E ANNÉE — 2018-2019

PARCOURS MATHÉMATIQUES — M67, GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

SOLUTIONS DE L'INTERROGATION

15 mars 2019

[durée : 2 heures]

Exercice 1 (Construction à la règle et compas)

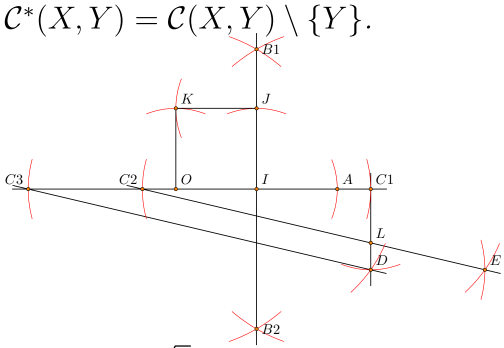
Soient les deux points $O(0,0)$ et $I(1,0)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Illustrer par un dessin et donner un programme de construction à la règle et au compas à partir de O et I :

a) des points $J(1,1)$ et $K(0,1)$ du carré $OIJK$;

b) du point $L(1+\sqrt{2}, -\frac{2}{3})$.

Solution :

On note $\mathcal{C}(X,Y)$ le cercle de centre X passant par Y, $\mathcal{C}(X,YZ)$ le cercle de centre X et de rayon YZ (qui est constructible si X, Y et Z le sont) et $\mathcal{C}^*(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y) \setminus \{Y\}$.



a)
1. $A(0,2) = \mathcal{C}^*(I,O) \cap (IO)$;
2. $\{B_1, B_2\} = \mathcal{C}(O,A) \cap \mathcal{C}(A,O)$, ainsi (B_1B_2) est la médiatrice de $[OA]$;
3. $\{J(1,1), J'(1,-1)\} = \mathcal{C}(I,O) \cap (B_1B_2)$;
4. $K(0,1) = \mathcal{C}(O,I) \cap \mathcal{C}(J,I)$;

b)
5. $\{C_1(1+\sqrt{2},0), C_2(1-\sqrt{2},0)\} = \mathcal{C}(I,K) \cap (OI)$, car $IK = \sqrt{2}$;
6. $C_3(1-2\sqrt{2},0) = \mathcal{C}^*(C_2,I) \cap (OI)$;
7. $D(1+\sqrt{2},-1) = \mathcal{C}(C_1,JI) \cap \mathcal{C}(I,JC_1)$;
8. $E = \mathcal{C}(D,C_3C_2) \cap \mathcal{C}(C_2,C_3D)$, de sorte que $(C_2E)//(C_3D)$;
9. $L(1+\sqrt{2},-\frac{2}{3}) = (C_1D) \cap (C2E)$, car d'après Thalès $C_1L = C_1D\frac{C_1C_2}{C_1C_3} = 1\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$.

Exercice 2 (Inégalité triangulaire, isométries)

Soient A, B, C trois points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

a) Soient A, B et C alignés, montrer que $AC \leq AB + BC$, avec égalité si et seulement si $B \in [AC]$.

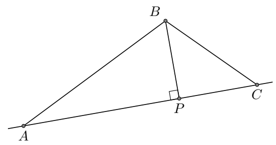
b) Soient A, B et C non alignés, montrer que $AC < AB + BC$.

c) En déduire que les isométries du plan euclidien préservent les alignements des points.

Solution :

a) Comme A, B et C sont alignés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = (1-\lambda)A + \lambda C$. Donc $\overrightarrow{AB} = B - A = \lambda(C - A) = \lambda\overrightarrow{AC}$, ainsi $AB = |\lambda|\, AC$. De même $\overrightarrow{CB} = B - C = (1-\lambda)(A-C) = (1-\lambda)\overrightarrow{CA}$, et donc $BC = |1-\lambda|\, AC$. Ainsi $AB+BC = (|\lambda|+|1-\lambda|)AC$, et comme $|\lambda| + |1-\lambda| \geq 1$ avec égalité si et seulement si $\lambda \in [0,1]$, on trouve que $AB + BC \geq AC$, avec égalité si et seulement si $B \in [AC]$.

b) Soient A, B et C non alignés et P la projection orthogonale de B sur (AC). Comme $BP > 0$, nous avons d'après Pythagore $AB > AP$ et $BC > PC$. Ainsi $AB + BC > AP + PC \geq AC$.



c) Soient f une isométrie et A, B, C trois points alignés dans cet ordre, avec $B \in [AC]$. Nous avons $f(A)f(B) + f(B)f(C) = AB + BC$ et $AC = f(A)f(C)$, car f est une isométrie, et $AB + BC = AC$ d'après a). Ainsi $f(A)f(B) + f(B)f(C) = f(A)f(C)$ et donc, d'après b), les points $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sont alignés[1], en particulier f préserve l'alignement des points.

Exercice 3 (Axiomatique)

On rappelle les propriétés d'incidence et d'ordre :

- **(I1)** par deux points distincts passe une unique droite,
- **(I2)** toute droite contient au moins deux points distincts,
- **(I3)** il existe trois points non alignés,
- **(O1)** si C est entre A et B, B et C sont alignés, deux à deux distincts et C est aussi entre B et A,
- **(O2)** pour tous points distincts A et B il existe un point C tel que B soit entre A et C,
- **(O3)** parmi trois points alignés deux à deux distincts, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres,
- **(O4)** soient A, B, et C trois points non alignés et $\mathcal{D}$ une droite ne passant par aucun d'eux. Si $\mathcal{D}$ passe par un point D entre A et B, alors $\mathcal{D}$ passe ou bien par un point entre A et C, ou bien par un point entre B et C, mais pas les deux à la fois.

Soient A, B et C trois points non alignés, I un point entre B et C, J un point entre A et C.

a) Montrer que la droite (AI) est distincte des droites (AB) et (AC).

b) Montrer que (AI) passe par un point O entre B et J.

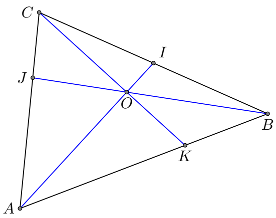
c) Montrer que O est entre A et I.

d) Montrer que (CO) passe par un point K entre A et B, puis que O est entre C et K.

1. dans cet ordre, d'après a)

Solution :

Comme A, B et C sont non alignés, les droites (AB), (BC) et (CA) sont bien définies. De plus comme I est aligné avec B et C, d'après **(O1)**, alors $I \neq A$ et donc la droite (AI) est bien définie. De même, les droites (BJ) et (CK) sont bien définies.



a) Supposons que $(AI) = (AB)$, alors $(AB) \overset{\textbf{(I1)+(O1)}}{=} (BI) \overset{\textbf{(O1)}}{=} (BC)$, ce qui est en contradiction avec le fait que A, B et C sont non alignés, donc $(AI) \neq (AB)$. De même $(AI) \neq (AC)$.

b) Remarquons d'abord que la droite (AI) ne passe par aucun des trois points J,C et B car sinon on aurait $(AI) = (AC)$ ou $(AI) = (AB)$ en contradiction avec la question précédente. Donc on peut appliquer **(O4)** à la droite (AI) et les points B,J et C. La droite (AI) ne passe pas entre J et C, car sinon $(AC) = (AI)$ vu qu'on aurait en plus de A un autre[2] point qui serait sur ces deux droites. Ainsi on trouve que (AI) passe par un point O entre B et J.

c) D'après la question précédente, appliquée à J à la place de I, on trouve que (BJ) passe par un point O' entre A et I. Si on suppose que $O \neq O'$, on aurait ces deux points sur les droites (AI) et (BJ), qui doivent ainsi coïncider, et donc $(AI) = (AJ) \overset{\textbf{(O1)}}{=} (AC)$ serait en contradiction avec a). Ainsi $O = O'$ est entre A et I.

d) D'après a) appliqué aux points C, A, I et O nous avons $(CO) \neq (CI) \overset{\textbf{(O1)}}{=} (CB)$ et $(CO) \neq (CA)$, ainsi (CO) ne passe par aucun des points A, B et I, ni par un point entre B et I. Donc on peut appliquer **(O4)** à la droite (CO) et les points A,B et I pour conclure que (CO) passe par un point K entre A et B. Pour conclure que O est entre C et K il suffit d'appliquer la question c) avec C et K à la place de A et I.

---

2. car A n'est pas entre J et C d'après **(O3)**.