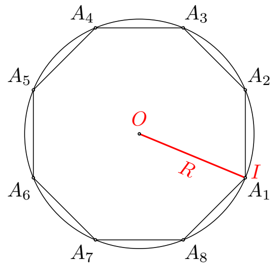
# Solutions du devoir surveillé

21 mai 2019

[ durée : 3 heures ]

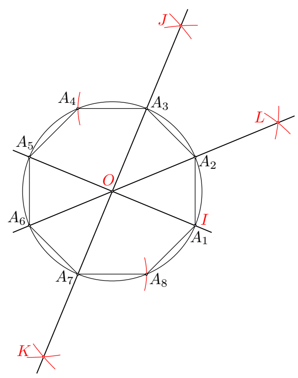
**Exercice 1** (Construction à la règle et au compas)




**a)** Soient $O$ et $I$ deux points distincts du plan. Construire à la règle et au compas à partir de ces deux points les sommets $A_1 = I, A_2, \ldots, A_8$ d'un octogone régulier inscrit dans le cercle de centre $O$ et de rayon $OI$ (c.-à-d. des points $A_1 = I, A_2, \ldots, A_8$ deux à deux distincts situés sur le cercle de centre $O$ passant par $I$ tels que $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_7A_8 = A_8A_1$).

**b)** Déterminer l'aire de cet octogone régulier en fonction du rayon $R = OI$.

**Solution :**




**a)** On pose $A_1 = I$. Soit $A_5$ le second point d'intersection de $(OI)$ et du cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ passant par $I$. Les cercles de centre $A_1$ passant par $A_5$ et de centre $A_5$ passant par $A_1$ se coupent en deux points $J$ et $K$. La droite $(JK)$, médiatrice de $[A_1A_5]$, coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points, $A_3$ et $A_5$. Le cercle de centre $A_1$ passant par $O$ et celui de centre $A_3$ passant par $O$ se recoupent en un point $L$. La droite $(OL)$, bissectrice de l'angle $\widehat{A_1OA_3}$ coupe le cercle en deux points, $A_2$, sur la demi-droite $[OL)$, et $A_6$. Le cercle de centre $A_3$ passant par $A_2$ recoupe $\mathcal{C}$ en $A_4$, et le cercle de centre $A_7$ passant par $A_6$ recoupe $\mathcal{C}$ en $A_8$.

**b)** Les huit triangles $\triangle A_1OA_2$, $\triangle A_2OA_3$, ..., $\triangle A_7OA_8$ et $\triangle A_8OA_1$ étant égaux, ils ont même aire, et l'aire $\mathcal{A}$ de l'octogone est donc égale à $8 \cdot \mathcal{A}_{\triangle A_1OA_2}$. D'autre part, l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ vaut $\frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, l'aire du triangle $\triangle A_1OA_2$ vaut $\frac{1}{2} \cdot OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}R^2$. L'aire de l'octogone est donc égale à :

$$\mathcal{A} = 2\sqrt{2}R^2.$$

**Exercice 2** (Quadrilatère « des milieux »)

Étant donné un quadrilatère convexe (dit *« de départ »*) on appelle *« quadrilatère des milieux »* le quadrilatère convexe dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère de départ.

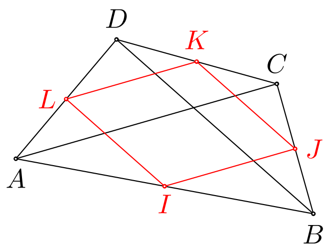
**a)** Montrer que quel que soit le quadrilatère de départ, le quadrilatère des milieux est un parallélogramme.

**b)** Quel est le rapport entre l'aire du quadrilatère de départ et l'aire du quadrilatère des milieux ?

**c)** Si le quadrilatère de départ est lui-même un parallélogramme, sous quelle condition le quadrilatère des milieux est-il un rectangle ? et un carré ?

**Solution :**

**a)** Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe (ou non : la convexité n'est pas nécessaire pour cette première question), et $I$ le milieu de $[AB]$, $J$ celui de $[BC]$, $K$ celui de $[CD]$ et $L$ celui de $[DA]$. La droite $(IJ)$ passe par les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$ du triangle $\triangle ABC$, et est donc parallèle à $(AC)$. La droite $(KL)$ passe par les milieux des côtés $[CD]$ et $[DA]$ du triangle $\triangle ACD$, et est donc parallèle à $(AC)$. Les droites $(IJ)$ et $(KL)$ étant toutes deux parallèles à $(AC)$ sont parallèles entre elles. On montre de même que $(IL)$ et $(JK)$ sont parallèles entre elles, car toutes deux parallèles à $(BD)$. Le quadrilatère $IJKL$ est donc un parallélogramme.




**b)** On conserve les notations de la première question. Comme le triangle $\triangle AIL$ est homothétique de rapport $\frac{1}{2}$ à $\triangle ABD$ nous avons la relation des aires $\mathcal{A}_{\triangle AIL} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\triangle ABD}$. Et de même pour les trois autres triangles complémentaires au parallélogramme $IJKL$. Donc on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{IJKL} &= \mathcal{A}_{\triangle AIL} + \mathcal{A}_{\triangle BJI} + \mathcal{A}_{\triangle CJK} + \mathcal{A}_{\triangle DKL} \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{A}_{\triangle ABD} + \mathcal{A}_{\triangle BCA} + \mathcal{A}_{\triangle CDB} + \mathcal{A}_{\triangle DAC}\right) \\ &= \frac{1}{4}.2.\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}.\end{aligned}$$

Ainsi au final le rapport des aires est $\mathcal{A}_{IJKL} : \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}$.

**c)** Nous avons les équivalences « le parallélogramme $IJKL$ est un rectangle » $\Leftrightarrow$ $(IJ) \perp (JK) \Leftrightarrow (AC) \perp (BD) \Leftrightarrow$ « le parallélogramme $ABCD$ est un losange ».
De plus, en utilisant que $IJ = \frac{1}{2}AC$ et $KL = \frac{1}{2}BD$, nous avons $IJ = KL \Leftrightarrow AC = BD$. Ainsi « le parallélogramme $IJKL$ est un carré » $\Leftrightarrow$ « le parallélogramme $ABCD$ est un losange à diagonales égales » $\Leftrightarrow$ « le parallélogramme $ABCD$ est un carré ».

## Exercice 3 (Triangle rectangle et cercles)

**a)** Soit $ABC$ un triangle rectangle en $C$. Soient $a = BC$ et $b = AC$ les longueurs des côtés de l'angle droit. Montrer que la longueur $h$ de la hauteur issue de $C$ vérifie

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

**b)** Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle de diamètre $[OM]$. Soit $A$ un point de $\mathcal{C}_1$ différent de $O$ et $M$. Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre $O$ passant par $M$. On note $B$ et $C$ les points d'intersection de $(OA)$ et $\mathcal{C}_2$. Montrer que

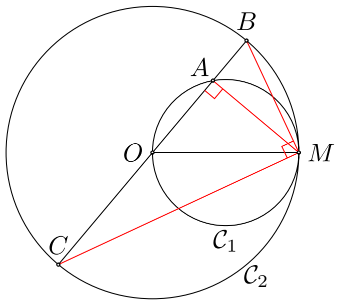
$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{MA^2}.$$

**c)** Exprimer les longueurs des arcs $\widehat{MB}$ et $\widehat{MC}$ de $\mathcal{C}_2$ en fonction des longueurs des arcs $\widehat{AO}$ et $\widehat{AM}$ de $\mathcal{C}_1$.[1]

## Solution :

**a)** L'aire du triangle rectangle $\triangle ABC$ s'exprime comme $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{ab}{2}$ ou comme $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$, d'où, en notant $c = AB$, $ab = ch$. D'après Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, et donc $\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

**b)** Considérons le triangle $\triangle BCM$. Comme $[BC]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_2$ et $M \in \mathcal{C}_2$, ce triangle est rectangle en $M$. D'autre part, $A$,$M$ et $O$ sont sur $\mathcal{C}_1$ dont $[OM]$ est un diamètre. Le triangle $\triangle MAO$ est donc rectangle en $A$, ce qui signifie que $[AH]$ est la hauteur de $BCM$ issue de $A$. L'égalité résulte alors de la question précédente.

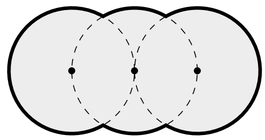



1. On considère toujours l'arc le plus court : par exemple dans le cas de $\widehat{MB}$ on parle de l'arc ne contenant pas $C$, dans le cas de $\widehat{AM}$ on parle de l'arc ne contenant pas $O$.

**c)** Supposons pour fixer les notations que $B$ soit le point d'intersection de $[OA)$ et de $\mathcal{C}_2$. Notons $R_1 = \frac{OM}{2}$ et $R_2 = OM$ les rayons de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. La longueur de l'arc $\widehat{BM}$ est égale à $R_2 \cdot \widehat{BOM}$ (où $\widehat{BOM}$ est exprimée en radians). Mais $\widehat{BOM} = \widehat{AOM}$ est dans $\mathcal{C}_1$ un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{AM}$. L'arc $\widehat{AM}$ mesure donc $R_1 \cdot \frac{1}{2}\widehat{AOM}$. Autrement dit, les arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{BM}$ ont la même longueur.
Les points $B$ et $C$ sont diamétralement opposés. Ainsi la somme des arcs $\widehat{MB}$ et $\widehat{MC}$ est égale au demi-périmètre du cercle $\mathcal{C}_2$, soit le double de la longueur de l'arc $\widehat{OM}$ de $\mathcal{C}_1$. La longueur $l(\widehat{CM})$ de l'arc $\widehat{CM}$ vaut donc $l(\widehat{CM}) = l(\widehat{BC}) - l(\widehat{BM}) = 2(l(\widehat{OA}) + l(\widehat{AM})) - l(\widehat{AM}) = 2l(\widehat{OA}) + l(\widehat{AM})$.

**Exercice 4** (Kangourou 2019)

La figure ci-contre est faite de trois cercles de même rayon $R$ dont les centres sont alignés. Le cercle du milieu passe par les centres des deux autres. Quel est le périmètre de cette figure ?



**Solution :**

Les triangles rouges sur la figure ci-contre sont équilatéraux, donc le périmètre est constitué de deux arcs de 240° et de deux arcs de 60°. Ainsi le périmètre est de $2\frac{4\pi}{3}R + 2\frac{\pi}{3}R = \frac{10}{3}\pi R$.