

DEVOIR SURVEILLÉ

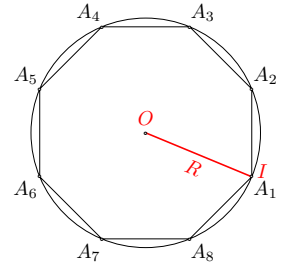
21 mai 2019

[durée : 3 heures]

 **Documents autorisés :** Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.

Exercice 1 (Construction à la règle et au compas)

- a) Soient O et I deux points distincts du plan. Construire à la règle et au compas à partir de ces deux points les sommets $A_1 = I, A_2, \dots, A_8$ d'un octogone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OI (c.-à-d. des points $A_1 = I, A_2, \dots, A_8$ deux à deux distincts situés sur le cercle de centre O passant par I tels que $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_7A_8 = A_8A_1$).



- b) Déterminer l'aire de cet octogone régulier en fonction du rayon $R = OI$.

Exercice 2 (Quadrilatère « des milieux »)

Étant donné un quadrilatère convexe (dit « *de départ* ») on appelle « *quadrilatère des milieux* » le quadrilatère convexe dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère de départ.

- a) Montrer que quel que soit le quadrilatère de départ, le quadrilatère des milieux est un parallélogramme.
- b) Quel est le rapport entre l'aire du quadrilatère de départ et l'aire du quadrilatère des milieux ?
- c) Si le quadrilatère de départ est lui-même un parallélogramme, sous quelle condition le quadrilatère des milieux est-il un rectangle ? et un carré ?

Exercice 3 (Triangle rectangle et cercles)

- a) Soit ABC un triangle rectangle en C . Soient $a = BC$ et $b = AC$ les longueurs des côtés de l'angle droit. Montrer que la longueur h de la hauteur issue de C vérifie

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

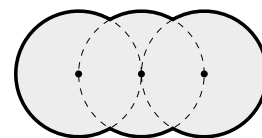
- b) Soit \mathcal{C}_1 un cercle de diamètre $[OM]$. Soit A un point de \mathcal{C}_1 différent de O et M . Soit \mathcal{C}_2 le cercle de centre O passant par M . On note B et C les points d'intersection de (OA) et \mathcal{C}_2 . Montrer que

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{MA^2}.$$

- c) Exprimer les longueurs des arcs \widehat{MB} et \widehat{MC} de \mathcal{C}_2 en fonction des longueurs des arcs \widehat{AO} et \widehat{AM} de \mathcal{C}_1 .¹

Exercice 4 (Kangourou 2019)

La figure ci-contre est faite de trois cercles de même rayon R dont les centres sont alignés. Le cercle du milieu passe par les centres des deux autres. Quel est le périmètre de cette figure ?



1. On considère toujours l'arc le plus court : par exemple dans le cas de \widehat{MB} on parle de l'arc ne contenant pas C , dans le cas de \widehat{AM} on parle de l'arc ne contenant pas O .