Solutions du rattrapage

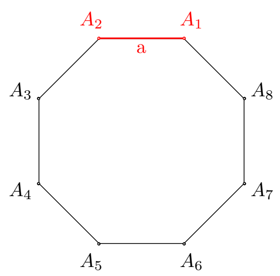
21 juin 2019

[durée : 3 heures]

Exercice 1 (Construction à la règle et compas)

a) Soient A_1 et A_2 deux points distincts du plan. Construire à la règle et au compas (en rédigeant le programme de construction choisi) les sommets $A_1, A_2, \dots, A_8$ d'un octogone régulier [1] ayant A_1A_2 pour côté.

b) Déterminer l'aire de cet octogone régulier en fonction de la longueur $a = A_1A_2$.

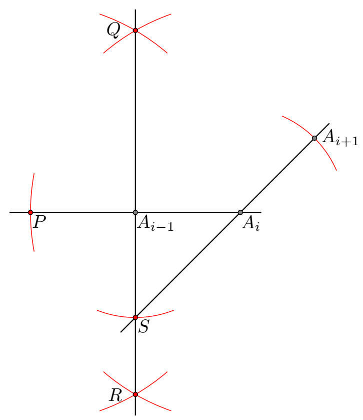


Solution :

a) On va donner la construction à la règle et au compas du point A_{i+1} à partir des points A_{i-1} et A_i. Ce point est tel que $\widehat{A_{i+1}A_iA_{i-1}} = 135°$ et $A_{i+1}A_i = A_{i-1}A_i$. Pour cela on va d'abord construire un point S qui est tel que $SA_{i-1}A_i$ soit un triangle rectangle isocèle.

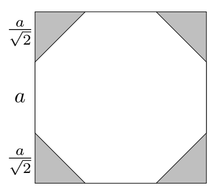
On note $\mathcal{C}(X,Y)$ le cercle de centre X passant par Y, et $\mathcal{C}^*(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y) \setminus \{Y\}$.

1. $P = \mathcal{C}^*(A_{i-1}, A_i) \cap (A_iA_{i-1})$;
2. $\{Q, R\} = \mathcal{C}(A_i, P) \cap \mathcal{C}(P, A_i)$;
3. $\{S, T\} = \mathcal{C}(A_{i-1}, A_i) \cap (QR)$;
4. $A_{i+1} = \mathcal{C}(A_i, A_{i-1}) \cap (SA_i)$.



Ainsi successivement on construit A_3 à partir de A_1 et A_2, puis A_4 à partir de A_2 et A_3 et ainsi de suite jusqu'à A_8.

b) L'aire d'un octogone de côté a est obtenue à partir de l'aire d'un carré de côté $(1+\sqrt{2})a$ auquel on retranche quatre demi-carrés de côté $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (voir la figure ci-contre). Ainsi on trouve que l'aire recherchée est $(1+\sqrt{2})^2a^2 - 2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2(1+\sqrt{2})a^2$.



1. Octogone convexe dont les côtés ont tous la même longueur.

Exercice 2 (Quadrilatère inscriptible et aire)

a) À quelle condition un parallélogramme $ABCD$ est-il inscrit dans un cercle[2] ?

b) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R. Quelle est l'aire maximale d'un parallélogramme inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$?

c) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R et $ABCD$ un parallélogramme d'aire S inscrit dans $\mathcal{C}$. Exprimer le périmètre P de $ABCD$ en fonction du rayon R et de l'aire S.

d) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R. Quel est le périmètre maximal d'un parallélogramme inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$?

Solution :

a) Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux. D'autre part, les angles opposés d'un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle sont supplémentaires. Un parallélogramme inscrit dans un cercle a donc ses angles droits, c'est un rectangle. Cette condition nécessaire est aussi suffisante car un rectangle est un parallélogramme inscrit dans un cercle.

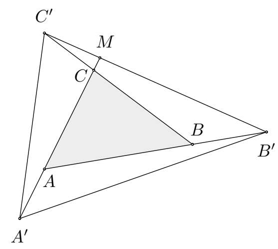
b) D'après la question précédente, un parallélogramme $ABCD$ inscrit dans un cercle est un rectangle. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont alors des diamètres du cercle. Si on note $\alpha \in [0, \pi/2]$ la mesure de l'angle (aigu) entre les diagonales, alors l'aire de $ABCD$ est $2R^2 \sin(\alpha)$. Ainsi l'aire maximale de $ABCD$ est $2R^2$, et elle est atteinte quand $AC \perp BD$, autrement dit si et seulement si $ABCD$ est un carré.

c) On note a et b les côtés du rectangle $ABCD$ ayant une diagonale de $2R$. D'après Pythagore $a^2 + b^2 = 4R^2$ et donc $P^2 = 4(a+b)^2 = 4(a^2+b^2) + 8ab = 16R^2 + 8S$. Et ainsi on trouve $P = \sqrt{16R^2 + 8S}$.

d) D'après les deux questions précédentes on trouve que le périmètre est maximal quand l'aire est maximale, c.-à-d. quand $ABCD$ est un carré, et dans ce cas il vaut $P = 4\sqrt{2}R$.

2. C.-à-d. a les quatre sommets sur un même cercle.

Exercice 3 (Triangles)



Soit ABC un triangle. On considère le triangle $A'B'C'$ obtenu en prolongeant vers l'extérieur chaque côté de la moitié de sa longueur. Plus précisément, A' est le point de $[CA)$ tel que $AA' = \frac{1}{2}CA$, B' le point de $[AB)$ tel que $BB' = \frac{1}{2}AB$ et C' le point de $[BC)$ tel que $CC' = \frac{1}{2}BC$.

a) Calculer l'aire de $A'B'C'$ en fonction de l'aire de ABC.

b) Démontrer que la droite (AC) coupe la droite $(B'C')$ en un point M situé entre B' et C'.

c) Démontrer que $\dfrac{C'M}{B'M} = \dfrac{1}{3}$. *Indication : On peut utiliser le lemme dit « du chevron ».*

d) Expliquer comment retrouver le triangle d'origine ABC à partir du triangle $A'B'C'$.

Solution :

a) Puisque B, C et C' sont alignés avec $CC' = \frac{1}{2}BC$, on a $\text{aire}(ACC') = \frac{1}{2}\,\text{aire}(ABC)$. Puisque C, A et A' sont alignés avec $CA' = \frac{3}{2}CA$, on a $\text{aire}(CC'A') = \frac{3}{2}\,\text{aire}(CC'A) = \frac{3}{4}\,\text{aire}(ABC)$.

On montre de même que $\text{aire}(BCC')$ et $\text{aire}(AA'B')$ sont égales à $\frac{3}{4}\,\text{aire}(ABC)$.

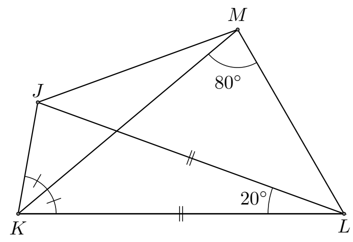
Finalement, $A'B'C'$ étant union presque disjointe des quatre triangles ABC, $BB'C'$, $CC'A'$ et $AA'B'$ on a $\text{aire}(A'B'C') = (1 + 3 \cdot \frac{3}{4})\,\text{aire}(ABC) = \frac{13}{4}\,\text{aire}(ABC)$.

b) La droite (AC) coupe la droite (BC') en C qui est entre B et C'. Elle coupe la droite (BB') en A qui n'est pas entre B et B' (puisque c'est B qui est entre A et B'). D'après l'axiome de Pasch appliqué dans le triangle $BB'C'$, (AC) coupe donc la droite $(B'C')$ entre B' et C', en un point noté M.

c) D'après le lemme dit « du chevron », $\frac{C'M}{B'M} = \frac{\text{aire}(C'AA')}{\text{aire}(B'AA')}$. Or, d'après ce qui a été vu plus haut, $\text{aire}(C'AA') = \frac{1}{4}\,\text{aire}(ABC)$ et $\text{aire}(B'AA') = \frac{3}{4}\,\text{aire}(ABC)$. D'où le résultat.

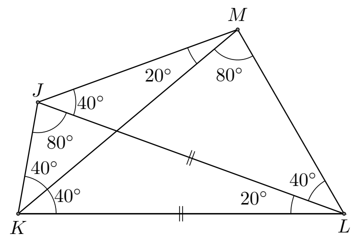
d) On a donc $\frac{C'M}{C'B'} = \frac{1}{4}$. On peut donc construire M à partir de B' et C' en construisant d'abord le milieu de $[B'C']$ intersection de la droite $(B'C')$ et de la droite passant par les deux points d'intersection des cercles de centre B' passant par C' et de centre C' passant par B'. On obtient ensuite le milieu de $[C'I]$ comme intersection de $(B'C')$ et de la droite passant par les points d'intersection des deux cercles de rayon $[C'I]$. On construit de même le point N de (AC) tel que $A'N = \frac{1}{4}A'C'$, et le point P de $(A'B')$ tel que $B'P = \frac{1}{4}B'A'$. On obtient finalement A comme intersection de $(B'N)$ et $(A'M)$, B de $(C'P)$ et $(B'N)$ et C de $(A'M)$ et $(C'P)$.

Exercice 4 (Kangourou 2005)



Dans le quadrilatère $JKLM$, la droite (KM) est la bissectrice de $\widehat{JKL}$ et $JL = KL$. En sachant que $\widehat{KML} = 80°$ et $\widehat{JLK} = 20°$, que vaut l'angle $\widehat{KJM}$?

Solution :



Comme le triangle $\triangle KLJ$ est isocèle, on trouve $\widehat{KJL} = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$. Donc les points K, L, M, J sont cocycliques, car $\widehat{KJL} = \widehat{KML}$. Ainsi $\widehat{JLM} = \widehat{JKM} = \frac{1}{2}80° = 40°$. Et pour finir $\widehat{KJM} = 180° - \widehat{KLM} = 180° - 20° - 40° = 120°$.